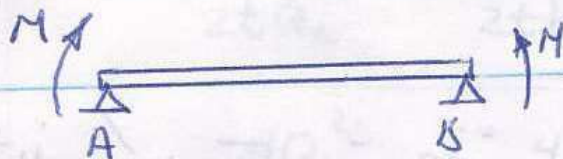




فصل چهارم

«خمش»

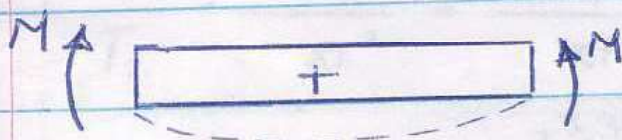
خمش خالص: در طول عضو مقدار انحراف ثابت می شود.
در خمش خالص برش صفر است.



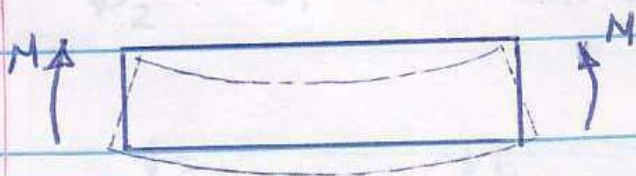
$$A_y = B_y = 0$$

حواشی برش صفر است.

$$M = \int v dx = 0 + C = C$$



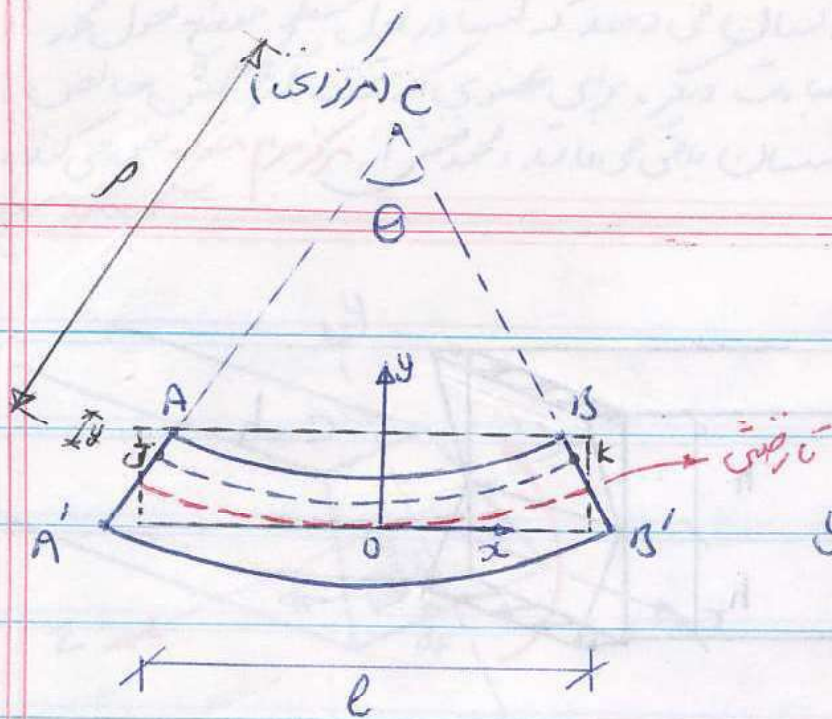
خمش ایستا تولید می کند.



انحراف مثبت: تارهای فوقانی کشیده شده و تارهای تحتانی شل شده می شود. **خمش مثبت**



انحراف منفی: تارهای فوقانی کشیده شده و تارهای تحتانی شل شده می شود. **خمش منفی**



تأرضی و تاب بر سطحش برابر خم
تابت می‌باشد.
فاصله تاب JK را از تأرضی y
فرض می‌کنیم.

y و فاصله از تاب تأرضی
rho و شعاع انحنا، تأرضی

$$L' = (\rho - y) \theta$$

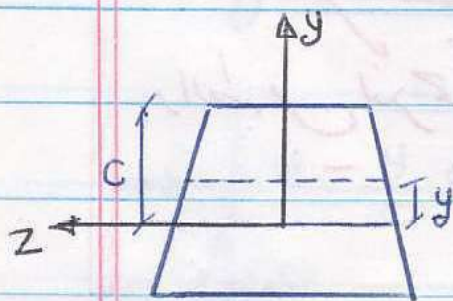
$$\delta = L - L' = \rho \theta - (\rho - y) \theta = y \theta$$

برابر y می‌باشد (بالاتر تأرضی) که د و ف می‌باشد.

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{y \theta}{\rho \theta} = \frac{y}{\rho}$$

ϵ_x (توزیع کرنش در مقطع)

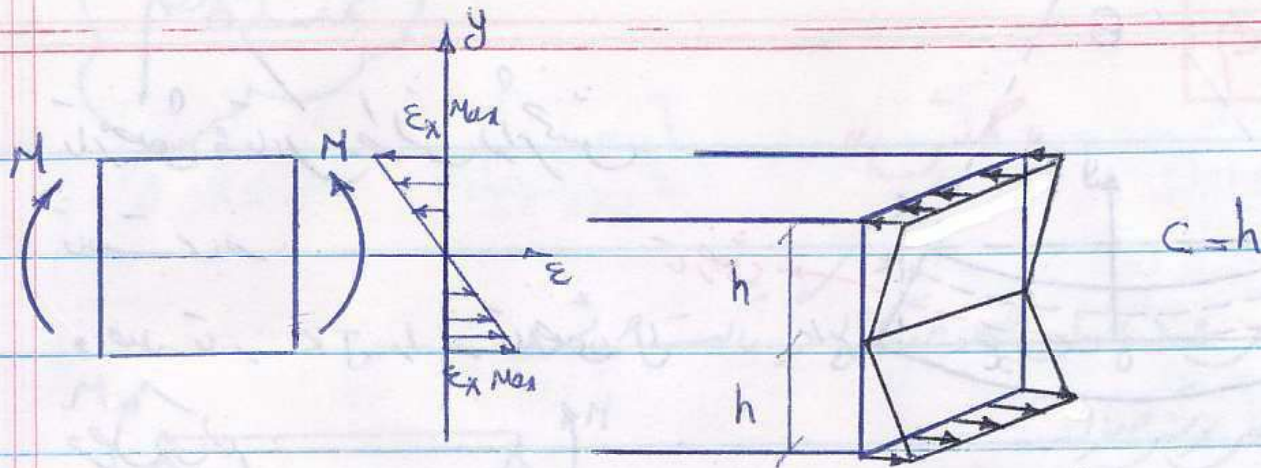
$$\epsilon_x = \frac{y}{\rho}$$



مقطع عرضی

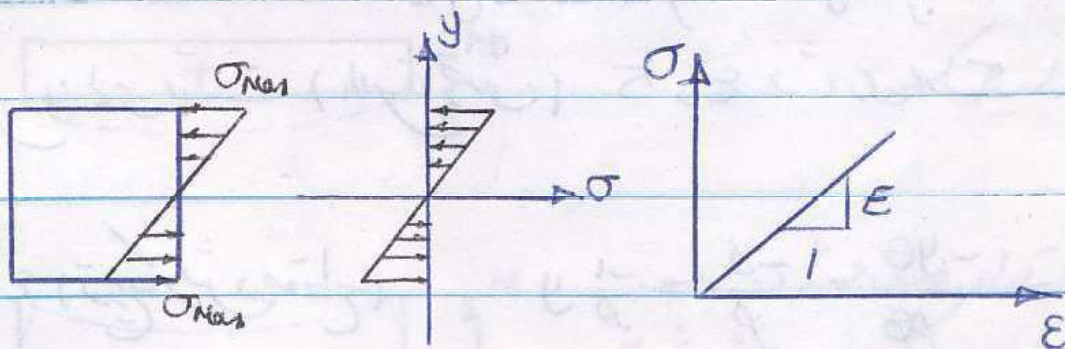
$$\epsilon_x^{Max} = \frac{c}{\rho}$$

بنا بر این توزیع کرنش در مقطع می‌باشد.



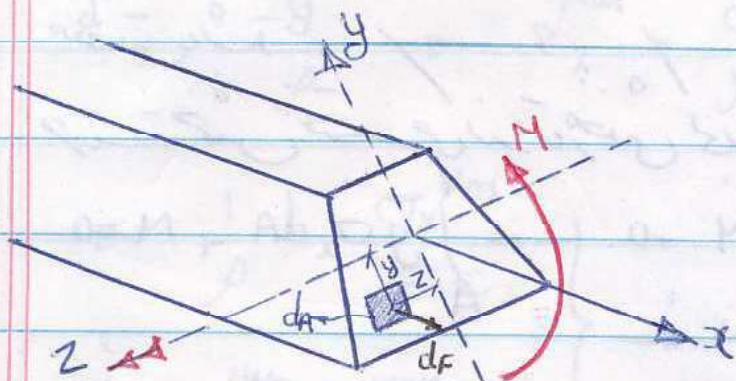
$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad \epsilon_x = \frac{-y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{-y}{\rho} E$$

$$\epsilon_x = \frac{y}{c} \epsilon_x^{Max} \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \frac{y}{c} \sigma_x^{Max}$$



✓
رابطه بین تنش خمشی در یک تیر مستقیم، محل تیر خمشی و

۱۱. $S_z = \int y dA = 0$ این معادله نشان می دهد که گشتاور اول سطح مقطع حول محور مختصات آن باید برابر با صفر باشد. به عبارت دیگر، برای عضو که تحت اثر خمش خاص قرار دارد و مادی که نه تنش که در ناحیه کشش است باقی می ماند، محور مختصات از مرکز جرم سطح عبور می کند.



گشتش $dF = \sigma_x dA$
 موج از بر تار خشی است

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A dF = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_x dA = 0 \Rightarrow \int_A \frac{y}{c} \sigma_x^{Max} dA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int_A y dA = 0 \Rightarrow \int_A y dA = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

$$S_x = \sum y_i A_i = \int y dA = 0$$

برابر است با تار خشی
 * محل تار خشی از مرکز سطح عبور می کند

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \int_A dM_y = 0 \Rightarrow \int_A z dF = 0 \Rightarrow \int_A z \cdot \sigma_x \cdot dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A z \cdot \frac{y}{c} \sigma_x^{Max} dA = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int_A z \cdot y dA = 0 \Rightarrow I_{zy} = 0$$

* نباید از محور اصلی می باشند. نباید از تار خشی باید که بر یکی از محورها اصلی

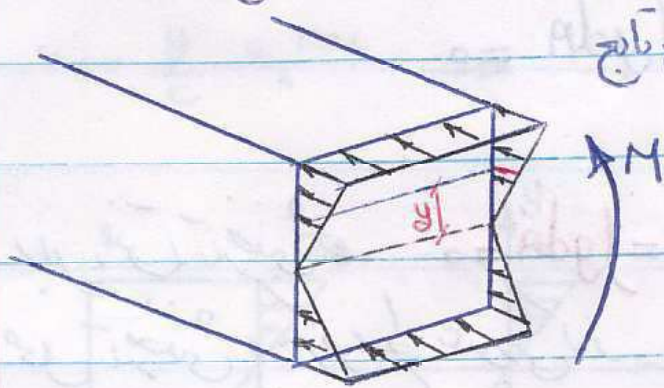
منطبق بود

جهت تنش فشاری در ناحیه تحتانی

$$\Sigma M_z = 0 \rightarrow \int_A y dF + M = 0 \rightarrow \int_A y \sigma_x dA + M = 0$$

$$\rightarrow \int_A y \frac{y}{c} \sigma_x^{Max} dA + M = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} \int y^2 dA + M = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_x^{Max}}{c} I_z + M = 0 \Rightarrow \sigma_x^{Max} = \frac{-M \cdot c}{I_z}$$



* این رابطه فقط در حالتی صادق است که مصالح تابع قانون هوک باشد. در غیر این صورت باید از رابطه بالایی نمودن استفاده نمود.

$$\sigma_x = \frac{-M \cdot y}{I_z}$$

موقع ۱

$$S = \frac{I}{c} \rightarrow \sigma^{Max} = \frac{M}{S} \rightarrow S = \frac{M^{Max}}{\sigma^{Max}}$$

نسبت جرمی

رابطه جرمی بر حسب تنش

$$\sigma_x = \frac{-M \cdot y}{I_z}$$

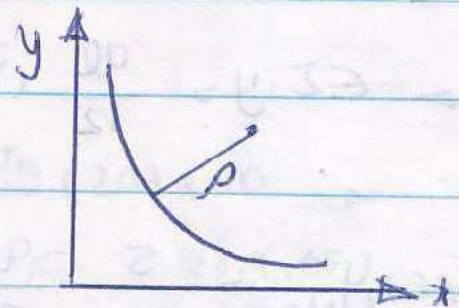
$$\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$

$$\rightarrow \sigma_x = E \epsilon_x$$

$$\epsilon_x = \frac{-y}{\rho} \Rightarrow \epsilon_x^{\text{Max}} = \frac{c}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_x^{\text{Max}}}{c}$$

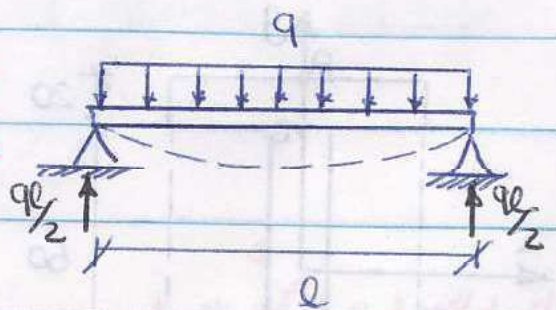
$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_x^{\text{Max}}}{E \cdot c} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^{\text{Max}} = \frac{M \cdot c}{I} \\ \rightarrow \left| \frac{1}{\rho} \right| = \frac{M}{EI} \quad (k = \frac{1}{\rho}) \end{array} \right.$$

$$\rho = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \sim \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \rightarrow \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2y}{dx^2}$$



$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$\Rightarrow EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow EI \frac{dy}{dx} = \frac{ql}{2}(\frac{x^2}{2}) - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

$$EI \cdot y = \frac{ql}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 + C_1 x + C_2$$

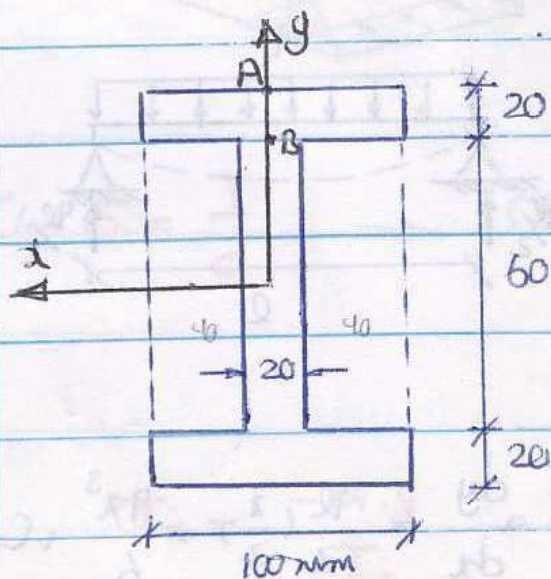
$$x=0 \rightarrow y=0 \rightarrow C_2=0$$

$$x=l \rightarrow y=0 \rightarrow 0 = \frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{-ql^3}{24}$$

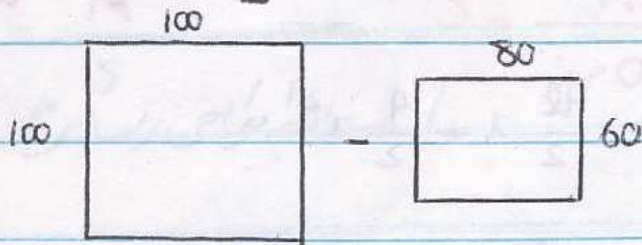
$$\Rightarrow EI \cdot y = \frac{ql}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 - \frac{ql^3}{24} x$$

$$\Rightarrow y_{Max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \text{ at } x = \frac{l}{2}$$

مثال: مقطع تیر آ شکل مطابق حرکت سرخس 15 kN.w + خرابی تیر محاسب کنید
جمع نیروی بسیار فوقانی تیر وارد شود مقدار است



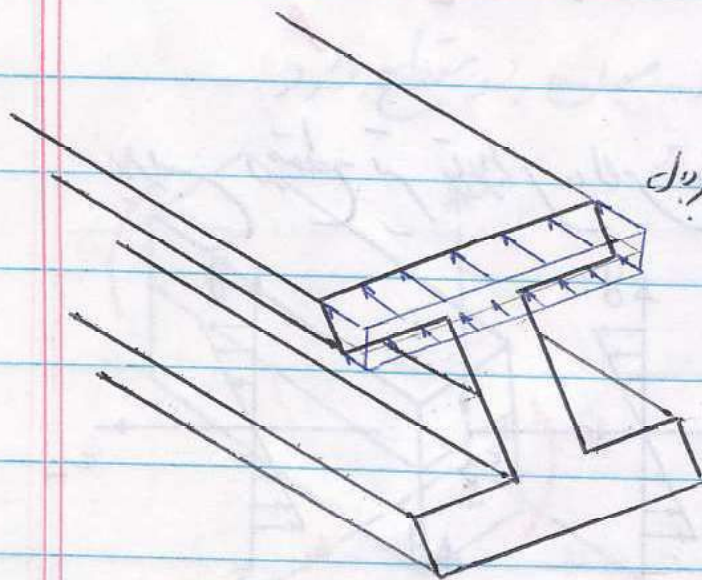
$$\sigma = - \frac{M \cdot y}{I}$$



$$I = \frac{100^4}{12} - \frac{80 \times 60^3}{12} = 6.89 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

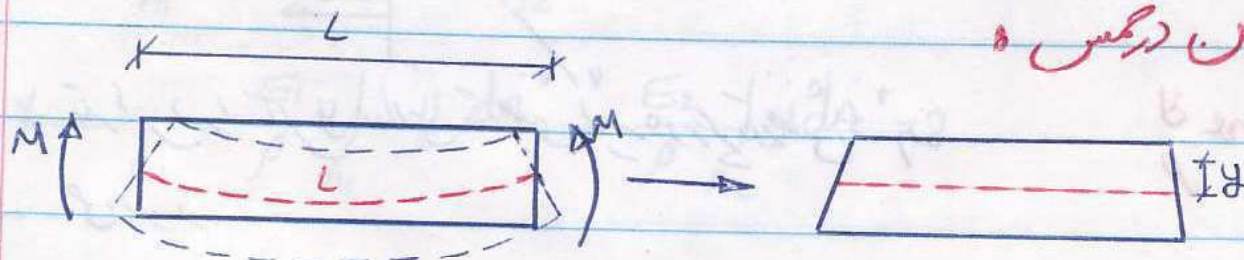
$$\sigma_A = \frac{-M y_A}{I} = \frac{15 \times 10^6 \times 50}{6.89 \times 10^6} = -108.9 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_B = \frac{3}{5} \sigma_A = -65.3 \text{ Mpa}$$



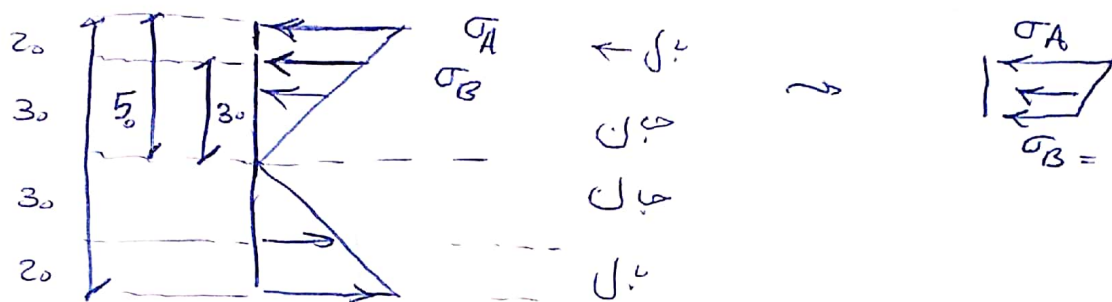
$$F = \frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} (20) \times 100 = \frac{108.9 + 65.3}{2} (20)(100) = 174.2 \text{ kN}$$

نیرو فشار در بدنه



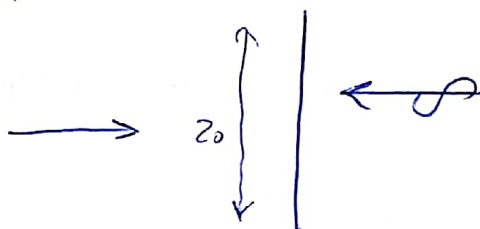
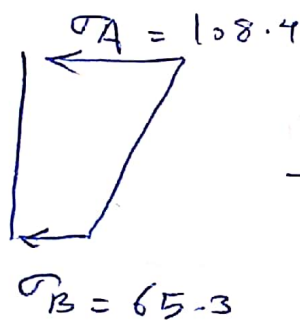
اثر لوانسون در خمش

$$\epsilon_x = \frac{-y}{\rho}$$



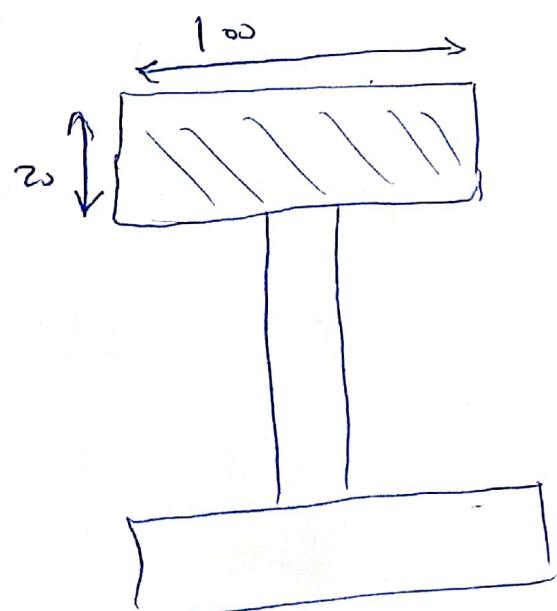
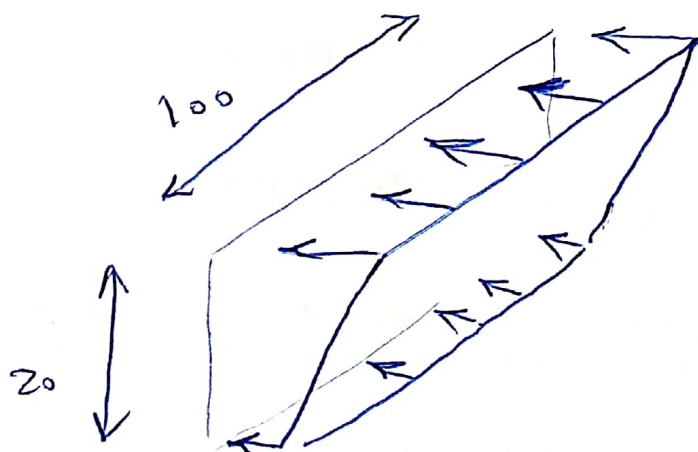
$$\sigma_A = \frac{M y_A}{I} = \frac{15 \times 10^6 \times 50}{6.89 \times 10^6} = 108.4$$

$$\sigma_B = \frac{M y_B}{I} = \frac{15 \times 10^6 \times 30}{6.89 \times 10^6} = 65.3$$



$$= \frac{108.4 + 65.3}{2} \times 20 \times 100$$

برای بارگذاری = بار



ابعاد 20 x 100 = در واقع
ابعاد بال هسته

در واقع به منظور سبب نیروی وارد بر آل :

ابتدا : / همان انیسی حساب کردیم.

✓ مقدار تنش را در بالا و پایین آل محاسب نمودیم.

✓ حجم حاصل شده را محاسب نمودیم.

منظور از حجم یا همان نیرو برابر است با مساحت تنش در عرض آل

$$F = \left[\frac{\sigma_A + \sigma_B}{2} \times t_f \right] \times b$$

\downarrow \downarrow \downarrow
برای دوزنته مساحت آل عرض آل

طراحی سازه بتنی:

$$\sigma = \frac{M}{I} y$$

مقایسه $(\sigma_{\text{max}})_{\text{max}} < \sigma_{\text{all}}$

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{I} c \quad , \quad c = \begin{array}{l} \text{فاصله از مرکز جرم} \\ \text{تا محور خنثی} \end{array}$$

$S = \frac{I}{c}$ \rightarrow \downarrow مقادیر

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M}{S_{\text{req}}} < \sigma_{\text{all}}$$

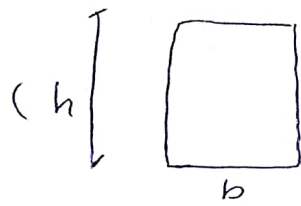
$$\rightarrow \frac{M}{\sigma_{\text{all}}} > S_{\text{req}}$$

σ_{all} در کشش و فشار با هم مقایسه می‌شوند

✓ مشکلی نیست



مقطع یک تیر تحت تنش، اگر تنش $M = 10 \text{ t.m}$ تحمل می کند. مقطع را در سه حالت زیر طراحی کنید.



$$[\sigma_{all} = 0.6 F_y, F_y = 2400 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}]$$

الف) مقطع مستطیل $h = 2b$ (عمق h ، عرض b)

ب) مقطع دایره

ج) مقطع IPE330

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{M}{\frac{I}{y}} = \frac{M}{S} < \sigma_{all} \rightarrow \frac{M}{\sigma_{all}} < S_{req}$$

$$S_{req} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2}{3}b^3$$

$$\rightarrow \frac{2}{3}b^3 > \frac{10 \times 10^5}{1440} = 695 \rightarrow b^3 > 1042$$

$$\rightarrow b = 10.15 \text{ cm}$$

$$h = 20.3 \text{ cm}$$

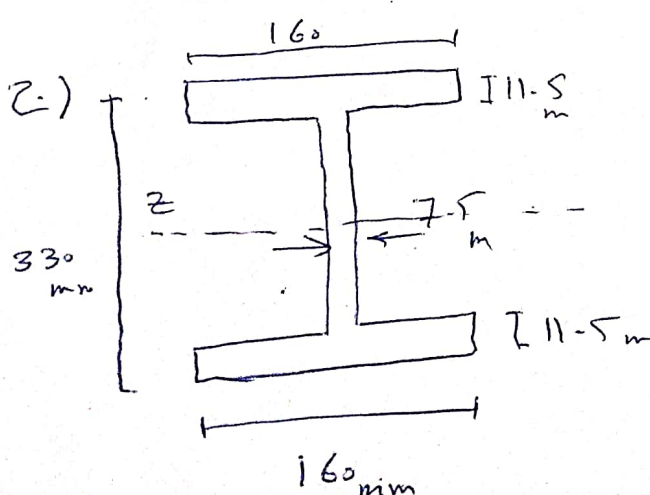
$$A = 206.05$$

$$\text{ب) } \frac{M}{\sigma_{all}} < S_{req} \rightarrow S_{req} = 695 \text{ cm}^3$$

$$I_{دایره} = \frac{\pi R^4}{4}, S = \frac{\pi R^4}{4R} = \frac{\pi R^3}{4} = 695 \rightarrow R^3 = 885$$

$$\rightarrow R = 9.65 \text{ cm}$$

$$A = 292.55$$



$$I_z = 11770 \text{ cm}^2, h = \frac{33}{2}, A = 62.6, G = 49.1$$

$$\rightarrow S = 713 \text{ cm}^3$$

$$\frac{M}{\sigma_{all}} = 695 < S_{req}$$

$$\rightarrow \text{if } S = 714 > 695 \checkmark$$

الاساس

وزن

الاساس

مقاس

697.12

161.8

206.1

مستطيل

705.76

229.7

292.55

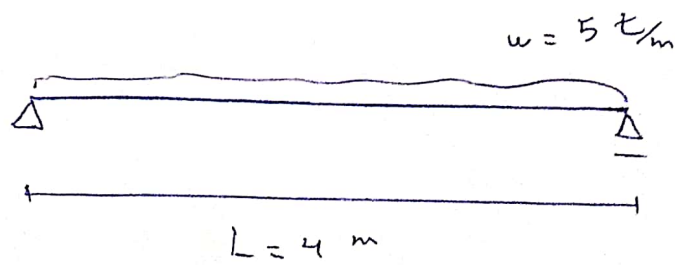
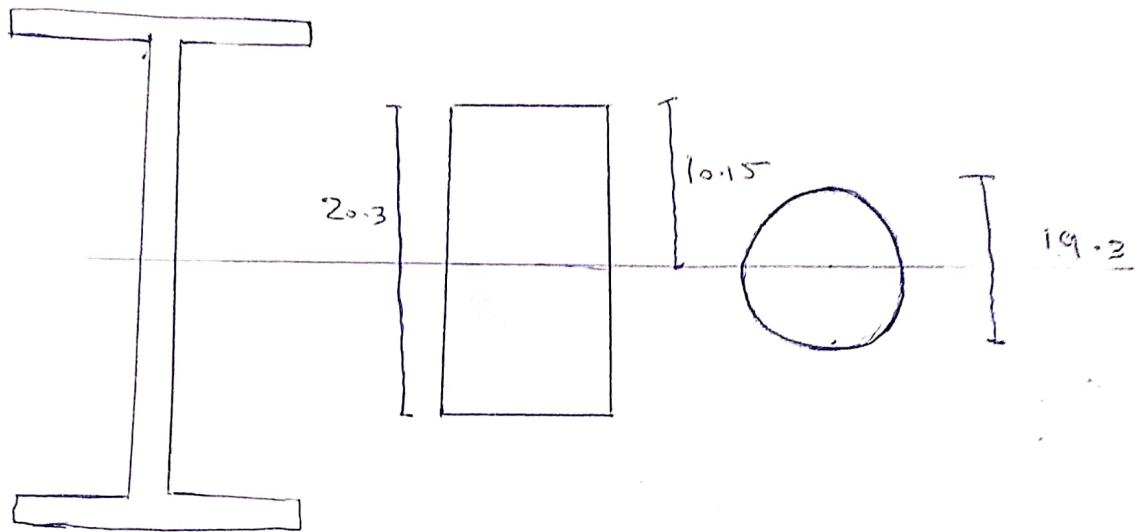
دائري

714

49.1

62.6

IPE330



$$\rightarrow M_{max} = \frac{5 \times 16}{8} = 10 \text{ t} \cdot \text{m}$$

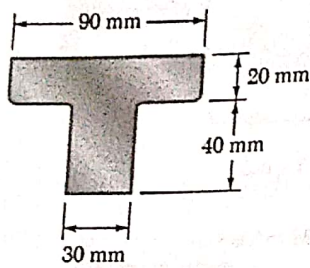
$$\epsilon_m = \frac{\Delta l}{l} = \frac{10.6 \times 10^{-4}}{100} \text{ psi}$$

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho}$$

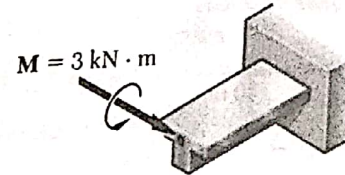
$$\rho = \frac{c}{\epsilon_m} = \frac{2.5 \text{ in}}{1.887 \times 10^{-3} \text{ in/in}}$$

$$\rho = 1325 \text{ in}$$

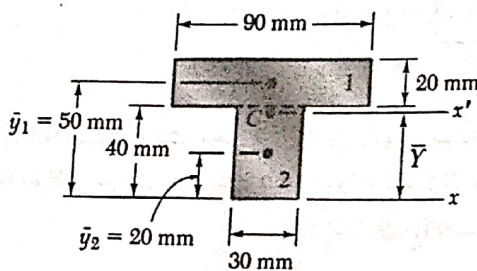
$$\rho = 11.0 \text{ m}$$



نمونه ۲.۴
فهرده آهن-ریختگی مطابق شکل کوپل ۳ kN.m وارد می شود. می دانیم $E = 165 \text{ GPa}$ و از اثر ماهیچه ها
بر دستگیر می شود، مطلوب است (الف) تنشهای کششی و فشاری ماکزیمم وارد بر قطعه، (ب) شعاع انحنای آن.



حل:
برکز جرم. سطح مقطع T شکل را به دو مستطیل تقسیم می کنیم و می نویسیم



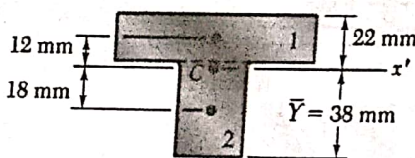
$$\bar{Y} \Sigma A = \Sigma \bar{y} A$$

$$\bar{Y}(3000) = 114 \times 10^3$$

$$\bar{Y} = 38 \text{ mm}$$

مساحت، mm^2	mm, \bar{y}	$\text{mm}^3, \bar{y}A$
$(20)(90) = 1800$	50	90×10^3
$(40)(30) = 1200$	20	24×10^3
$\Sigma A = 3000$		$\Sigma \bar{y}A = 114 \times 10^3$

گشتاور لختی مرکز جرم. برای تعیین گشتاور لختی هر مستطیل نسبت به محور x' که از مرکز جرم سطح مقطع
کلی عبور می کند از قضیه محاورهای موازی استفاده می کنیم و با جمع گشتاورهای لختی مستطیلهای می نویسیم



$$I_{x'} = \Sigma (\bar{I} + Ad^2) = \Sigma \left(\frac{1}{12} bh^3 + Ad^2 \right)$$

$$= \frac{1}{12} (90)(20)^3 + (90 \times 20)(12)^2 + \frac{1}{12} (30)(40)^3 + (30 \times 40)(18)^2 = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

الف. تنش کششی ماکزیمم. از آنجا که کوپل خمشی وارد بر قطعه به طرف پایین است، مرکز انحنادر زیر سطح
منطق قرار دارد. تنش کششی ماکزیمم در نقطه A ایجاد می شود که دورترین نقطه از مرکز انحنای منحنی است.

$$\sigma_A = \frac{Mc_A}{I} = \frac{(3 \text{ kN.m})(0.022 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_A = +76.9 \text{ MPa}$$

تنش فشاری ماکزیمم. در نقطه B ایجاد می شود؛ داریم

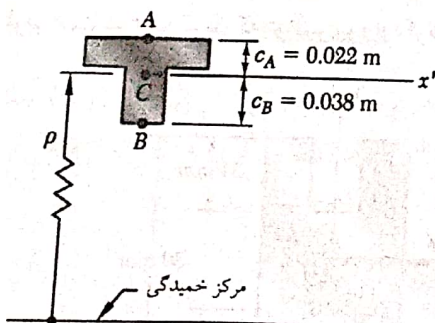
$$\sigma_B = -\frac{Mc_B}{I} = -\frac{(3 \text{ kN.m})(0.038 \text{ m})}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4}$$

$$\sigma_B = -131.2 \text{ MPa}$$

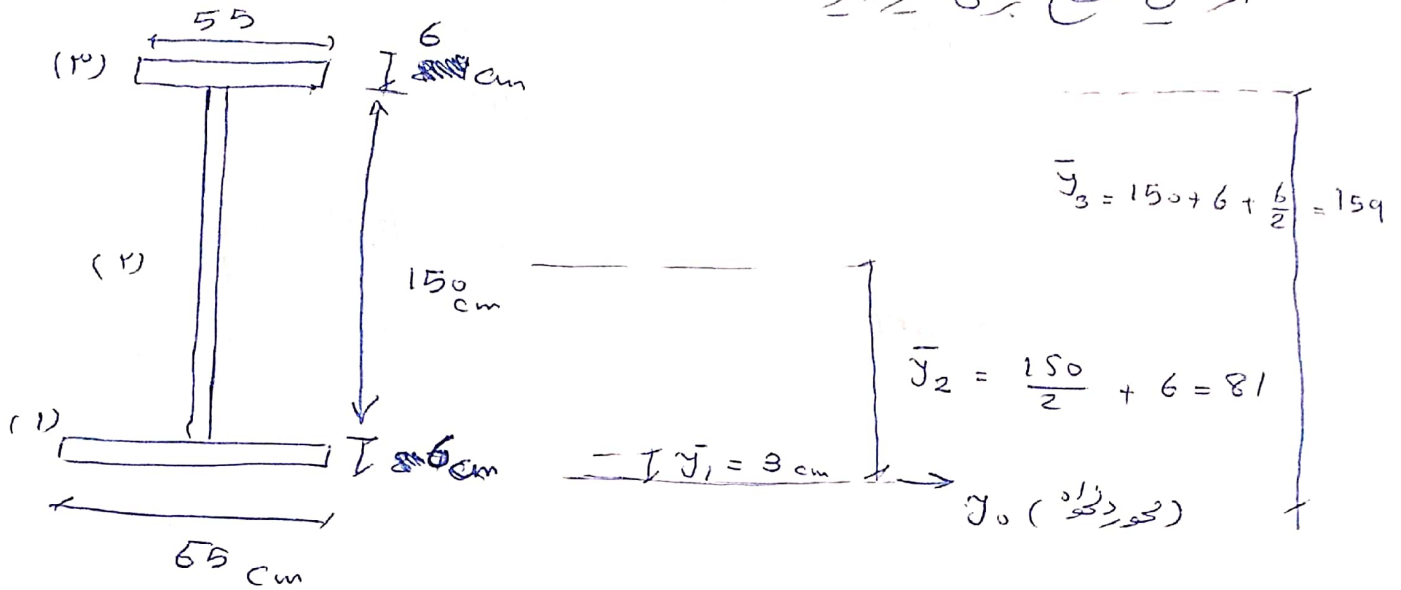
ب. شعاع انحنای. از معادله (۲.۴)، داریم

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{3 \text{ kN.m}}{(165 \text{ GPa})(868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)} = 2.095 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\sigma = 47.7 \text{ MPa}$$



مقطع فولادی نشان داده شده از فولاد نرمه با تمامی بازش مجاز $\sigma_{all} = 1440$ ساخته شده است. مطلوب است حد اکثر نیروی که این مقطع می تواند تحمل کند.
اگر این مقطع برای سازه زیر کار گرفته باشد مطلوب است حد اکثر بار P



مراحل اول: تعیین کاغذی

معمول: همان انیسی

معمول: $\bar{y} = 81$

معمول: $M = \sigma \times S$ ← نیرو

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{A}$$

ابتدای محوردنخواه انتخاب می کنیم.

مثلاً محور پایین را:

شکل را به سمت تبدیل می کنیم.

فاصله مرکز سطح هر شکل تا محوردنخواه را \bar{y}_i

می گذاریم. برای شکل (۱) فاصله ۲ تا بیست و نه بر این فاصله در همان تا

محور ۳ برابر با $\bar{y}_1 = 3$

شکل (۳) فاصله جانب = ۷۵ ← $\bar{y} = 75 + 6 = 81$

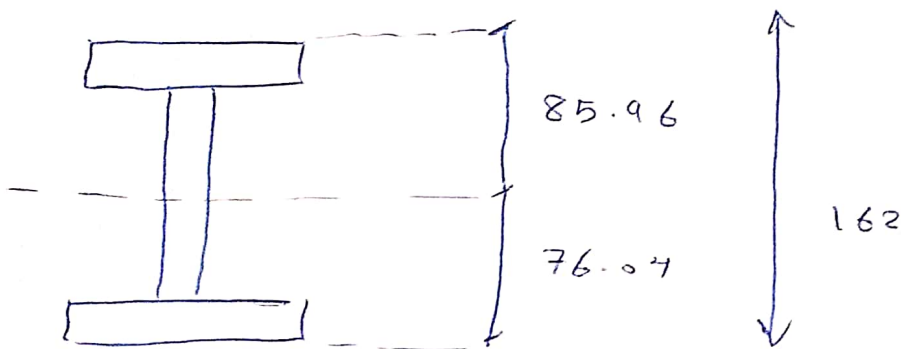
فاصله وسط به بالا یا تا محور ۳ را $\bar{y}_2 = 81$

$$\bar{y}_3 = 6 + 150 + \frac{6}{2} = 159$$

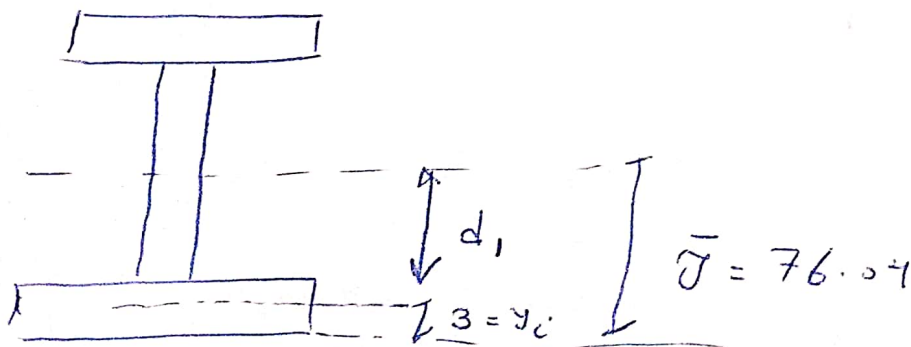
\downarrow \downarrow \downarrow
 فاصله جانب ارتفاع جان فاصله بال پایین

	y_c	A	$y_c A$
(1)	3	6×65	1170
(2)	81	1.5×150	18225
(3)	159	6×55	52470
		$\Sigma A = 445$	$\Sigma y_c A = 1170 + 18225 + 52470 = 71865$

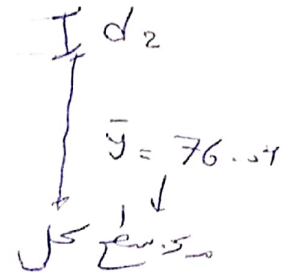
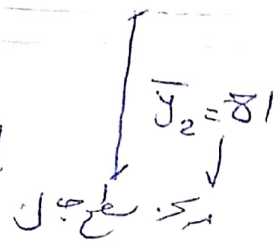
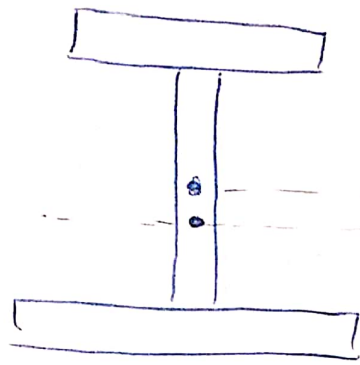
$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_c A}{\Sigma A} = 76.04$$



$I = \Sigma (I + A d^2)$ ی سب مان انیری
↓
 مان انیری حرکت حول محور لایزیده از مرکز سطح ↓
 خودش d: فاصله مرکز سطح خودش
تا محور کل

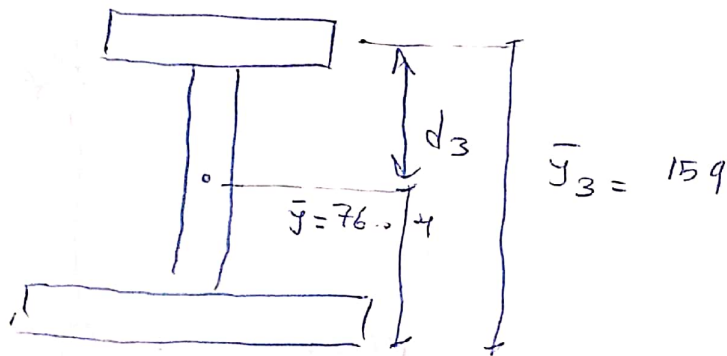


مثلا d برای بال یا سنی $d = \bar{y} - y_1 = 73.04$
↓
 مرکز سطح کل ↓
 مرکز سطح بال یا سنی



$$d_2 = \bar{y} - \bar{y}_2 = 76.04 - 81 = -4.96$$

یعنی مرکز سطح جان حدود 4.96 سانتیمتر از مرکز سطح کل است.



$$d_3 = \bar{y} - \bar{y}_3 = 76.04 - 159 = -82.96$$

یعنی مرکز سطح بالایی حدود 82.96 سانتیمتر از مرکز سطح کل است.

$$I = \sum (I + Ad^2)$$

$$= \frac{65 \times 6^3}{12} + 6 \times 65 \times (76.04 - 3)^2$$

$$+ \frac{1.5 \times 15^3}{12} + 1.5 \times 150 \times (81 - 76.04)^2$$

$$+ \frac{55 \times 6^3}{12} + 55 \times 6 \times (76.04 - 159)^2 =$$

$$= 2.0818 \times 10^6 + 0.4275 \times 10^6 + 2.2722 \times 10^6$$

$$= 4.781 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I = 4.781 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$$C_1 = 85.96 \rightarrow S_{y1} = \frac{I}{C_1} = 5.56 \times 10^4$$

$$C_2 = 76.04$$

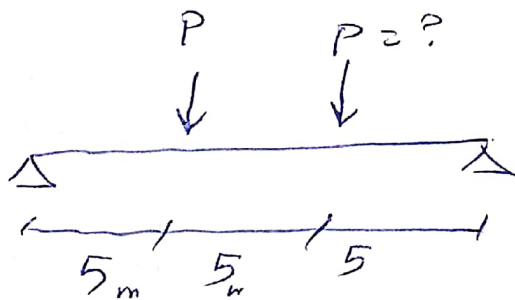
$$S_{y2} = \frac{I}{C_2} = 6.287 \times 10^4$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S_{min}} < \sigma_{all}$$

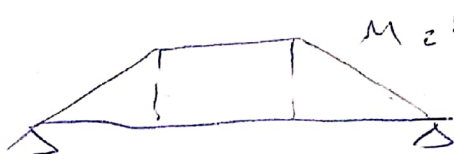
$$M_{max} < \sigma_{all} \times S_{min}$$

$$< 1470 \times 5.56 \times 10^4 = 820.64 \times 10^5 \text{ kg.cm}$$

$$M_{max} \leq 820 \text{ ton.m}$$



:-



$$M = 5P = 820 \rightarrow P = 160 \text{ ton}$$